SESSION DE 1974

INSTITUT NATIONAL SUPERIEUR DE CHIMIE INDUSTRIELLE DE ROUEN

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 2

Les parties I, II et III sont indépendantes. Elles peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

I

Soient :

E l'espace vectoriel, sur le corps R des nombres réels, des fonctions définies sur R, à valeurs dans R, indéfiniment dérivables sur R.

φ l'application linéaire de E dans E qui, à toute fonction y de E, associe :

$$\varphi(y) = y'' + y$$

(y'' désigne la dérivée seconde de y).

1° Trouver le noyau de φ. Quelle est sa dimension?

2° Trouver les fonctions de E dont l'image par φ est la fonction f telle que :

$$f(x) = \sin ax$$

(a désigne un nombre positif fixé).

Examiner le cas particulier $a = 1$.

Pour quelles valeurs de a les fonctions obtenues sont-elles bornées?

3° Soit g une fonction de E. On considère la fonction h, à valeurs dans R, définie par :

$$h(x) = \int_0^{\infty} g(t) \sin (x-t)\, dt$$

a. Démontrer que h appartient à E, et calculer $h'(x)$ et $h''(x)$.

On pourra commencer par « développer » sin $(x-t)$.

b. Existe-t-il des fonctions de E dont l'image par φ est g?

c. φ est-elle injective? Est-elle surjective?

II

Les fonctions qui interviennent dans cette partie II prennent leurs valeurs dans l'ensemble **R** *des réels. On suppose qu'elles vérifient les conditions de continuité et de dérivabilité nécessaires à la validité des calculs. Il n'est pas demandé d'expliciter ces conditions.*

1° On considère l'équation :

$$x\,F'_x(x, y) + y\,F'_y(x, y) - F(x, y) = -(x^2 + y^2) \qquad (1)$$

où F est une fonction inconnue, définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$.

Soit ϖ l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ qui, au couple (θ, ρ) associe le couple (x, y) par les formules :

$$x = \rho \cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho \sin\theta \qquad (2)$$

a. Former l'équation vérifiée par :

$$\Phi = F \circ \varpi .$$

b. En déduire $\Phi(\theta, \rho)$.

2° Soient :

E un espace affine euclidien de dimension 3 ,

$Oxyz$ un repère orthonormé de E ,

S l'ensemble des points de E dont un système (θ, ρ, z) de coordonnées cylindriques vérifient :

$$z^2 = -\rho^2 + 2\rho \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \theta < \pi .$$

(Les coordonnées cylindriques (θ, ρ, z) d'un point sont liées à ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) par les formules (2)).

a. Démontrer que l'intersection de S et d'un plan quelconque passant par Oz est un cercle de rayon 1 tangent en O à Oz.

b. Calculer le volume de la partie de E limitée par S et par le plan xOz.

3° Soient :

f une fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$,

Σ la surface dont l'équation par rapport à $Oxyz$ est $z = f(x, y)$,

M un point quelconque de Σ ,

N le point d'intersection du plan xOy et de la normale à Σ en M.

[illegible] l'égalité

ON = NM

quel que soit le point M de Σ, il faut et il suffit que $F = f^2$ soit solution de (1).

On rappelle que l'un des vecteurs directeurs de la normale à Σ au point de coordonnées (x, y, z) a pour composantes $f'_x(x, y), f'_y(x, y), -1$.

III

On rappelle la propriété suivante, dont la démonstration n'est pas demandée :

Soient :

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *une série à termes réels, alternée, convergente* ,

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *sa somme partielle d'ordre n*

S *sa somme.*

Si pour n fixé, on a, pour tout entier strictement positif p :

$$|u_{n+p}| > |u_{n+p+1}|$$

alors S *est compris entre* S_n *et* S_{n+1}.

On considère les séries entières :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(n+1)!} x^n$$

(la seconde est obtenue à partir de la première par dérivation terme à terme; on convient que $0! = 1$).

1° Quels sont les rayons de convergence des deux séries?

Soient $f(x)$ et $f'(x)$ leur sommes respectives. On ne cherchera pas à exprimer f et f' à l'aide de fonctions du programme.

2° Démontrer que, quel que soit x dans l'intervalle $]0,3[$, et quel que soit l'entier positif ou nul n, la somme de chacune des deux séries est comprise entre ses sommes partielles d'ordres n et $n+1$.

3° *a.* En comparant $f'(x)$ à la somme partielle d'ordre 3 de la série qui le définit, étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0,3[$.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une racine et une seule dans l'intervalle $]0,3[$ et que cette racine x_0 est comprise entre 1,4 et 1,5.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail